Waarom staat de maan scheef en waarom zien we steeds dezelfde kant?

Siebren van der Werf

Dit is een iets gewijzigde en gecorrigeerde versie van een eerder artikel, gepubliceerd in *Cornelis Douwes* 162(2005)12-13.

De stand van de maan - we bedoelen zijn helling - verandert voortdurend. De hellingshoek is de hoek tussen de verticaal en de denkbeeldige lijn die de “horens” van de maan verbindt. Die horens zijn meer uitgesproken als de maan een sikkeltje is dan wanneer hij bijna vol is, maar het effect is ook dan goed zichtbaar. In nautische handboeken ben ik nergens tegengekomen hoe die kantelhoek berekend wordt. In de praktijk van de zeevaart heeft het ook geen nut. Ik kan er tenminste niets bij bedenken. Toch liep ik er tegenaan toen ik de conjunctie tussen Jupiter en de maan wilde narekenen, zoals Willem Barentsz en zijn mannen die gezien zeggen te hebben in de nacht van 24 op 25 januari 1597. Dat verhaal staat in het jubileumnummer, Cornelis Douwes 143(2000) 65-70. In dat artikel staat ook de formule voor de kantelhoek van de maan. Hier, in dit verhaal, geef ik de achtergrond van die formule en een paar voorbeelden.
Er is nog iets vreemds aan de hand met de maan: we zien steeds dezelfde kant. Hoe komt dat, of beter: hoe is dat zo gekomen?

Hoe scheef staat de maan?

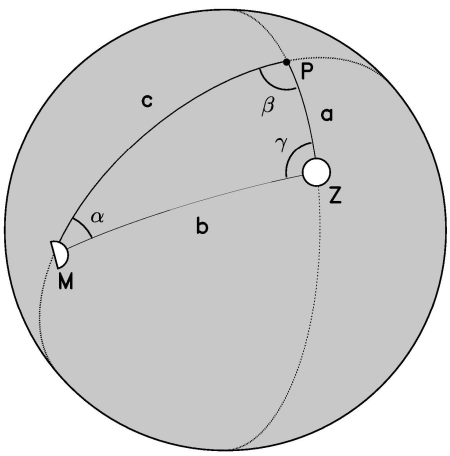

Fig. 1: *De waarnemer staat in P, de zon in Z en de maan in M.*

Figuur 1 schetst de situatie. De waarnemer in P ziet hier de maan westelijk van de zon. De zon loopt op de maan in en zal hem over ongeveer een week ingehaald hebben. De maan staat dus in zijn laatste kwartier. De zon belicht de maan langs de richting ZM en de schaduwlijn van de maan staat daar loodrecht op. De waarnemer in P ziet de maan langs de richting PM. Als we de hoek tussen PM en ZM aanduiden als α, dan volgt onmiddellijk dat de kantelhoek, die we K zullen noemen, gegeven wordt door $90° - \alpha$. Het uitrekenen van α vraagt wat rekenwerk en we laten kortheidshalve de symbolen van figuur 1: a, α, b, β, c en γ nog even staan.
Gebruik de volgende twee relaties:

$$\sin(\alpha)/\sin(a) = \sin(\beta)/\sin(b) \quad \text{(sinusregel)} \qquad (1)$$

$$\sin(b)\cos(\alpha) = \cos(a)\sin(c) - \sin(a)\cos(c)\cos(\beta) \quad \text{(cosinusregel van de 1ste soort)} \qquad (2)$$

en elimineer daaruit sin(b). Dat levert:

$$\tan(\alpha) = \sin(\alpha)/\cos(\alpha) = \sin(\beta)\sin(a)/[\cos(a)\sin(c)-\sin(a)\cos(c)\cos(\beta)] \qquad (3)$$

De waarnemer kan de hoogten van maan en zon, H_M en H_S, meten of berekenen en ook hun azimuthoeken, AZ_M en AZ_S. Het verband met de gebruikte symbolen is:

$$\alpha = 90° - K; \quad c = 90° - H_M; \quad a = 90° - H_S; \quad \beta = \Delta AZ = AZ_M - AZ_S$$

Alle grootheden die in het rechterlid van vergelijking 3 voorkomen, zijn voor de waarnemer meetbaar. Hij kan dus de hellingshoek uitrekenen en vindt:

$$\tan(K) = [\sin(H_S)\cos(H_M)-\cos(H_S)\sin(H_M)\cos(\Delta AZ)]/[\cos(H_S)\sin(\Delta AZ)] \qquad (4)$$

Dit is dezelfde formule die ook in CD 143 staat, afgezien van een minteken. Maar het is een kwestie van keuze, wanneer je de kantelhoek positief of negatief noemt.
Een paar voorbeelden. Figuren 2 en 3 laten de situatie zien voor onze breedtegraad (N 53°) en voor een maansdeclinatie van N 20°. De declinatie van de zon is hier 5° gekozen en het uurhoekverschil tussen zon en maan ±90°, d.w.z. eerste of laatste kwartier. De kantelhoek verandert gestaag en is het eerste en laatste kwartier ongeveer nul op het midden op de dag. Gedurende de nacht loopt de maan via het Noorden

om. De horizontale schaal is panoramisch en loopt van N (links) via Z (midden) weer terug naar N (rechts).
Dat is voor ons allemaal bekend genoeg: we zien het iedere dag gebeuren, als we de maan tenminste kunnen zien. Anders, en soms tegen de intuïtie ingaand, wordt het als we zo'n zelfde plaatje maken voor een andere breedte en een andere declinatie.
Figuur 4 geeft de situatie weer voor een breedte van S 15° en een maansdeclinatie van S 20°, met de maan in haar eerste kwartier. De maan loopt nu 's nachts niet via het Noorden om, maar loopt door het Zuiden terug. Dat teruglopen zet al in als hij nog boven de horizon staat. Het verrassende gevolg is dat de azimuthoek, na opkomst, eerst toeneemt. Intuïtief zou je verwachten dat hij na opkomst gewoon naar het Zuiden zou lopen, maar dat doet hij niet direct: hij gaat eerst juist de andere kant op, naar Oost, draait vervolgens van richting om en loopt dan pas naar het Zuiden. In de namiddag gebeurt hetzelfde, maar dan in andere volgorde: de azimuthoek bereikt een maximum als de maan nog ruim boven de horizon staat. Dan draait hij om en loopt al terug voordat hij ondergaat.

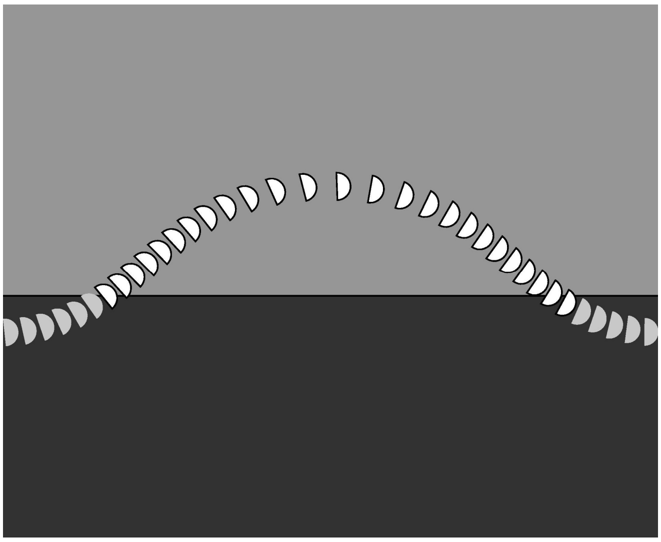

Fig. 2: *De maan in zijn eerste kwartier voor een waarnemer op 53° NB. De declinatie van de maan is N 20° genomen. Waar de maan boven de horizon staat is hij wit getekend en grijs als hij onder de horizon staat.*

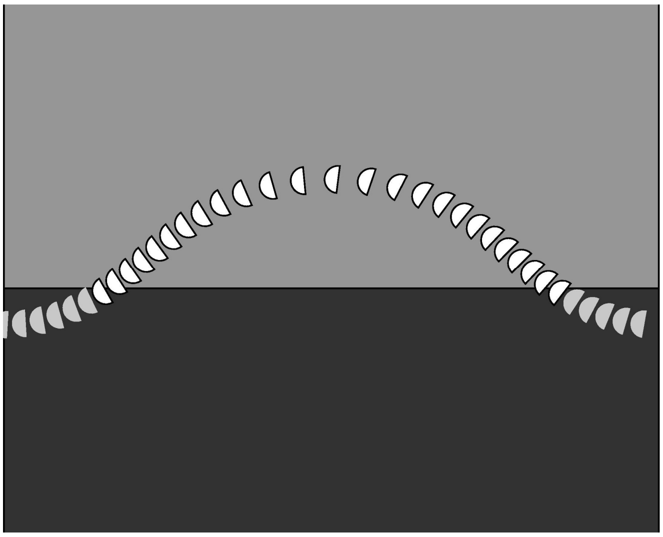

Fig. 3: *Als in figuur 2. De maan staat nu in zijn laatste kwartier.*

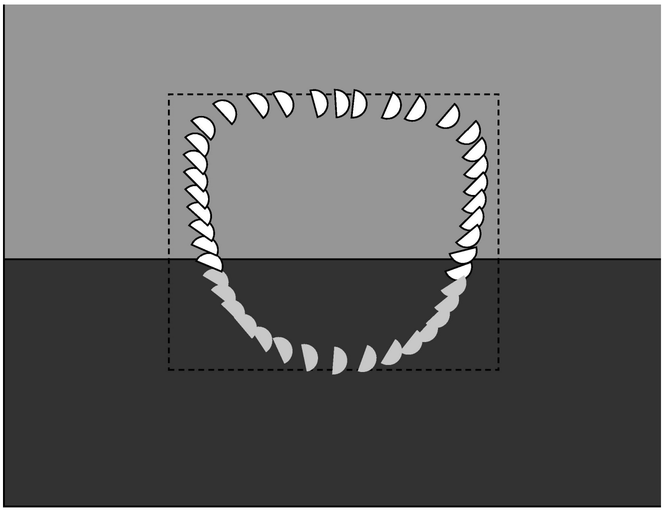

Fig. 4: *Schijngestalten en helling van de maan voor declinatie S 20°, eerste kwartier, gezien op een breedte van S 15°. Het gearceerde vierkant loopt van Oost naar West in azimut en van -90° tot +90° in hoogte.*

Waarom staat de maan altijd met dezelfde kant naar ons toe?

De maan draait om de aarde. Intussen draait de aarde om zijn as. Vanaf de aarde zien we maan ongeveer iedere 25 uur passeren, maar we zien steeds hetzelfde "gezicht". Omgekeerd, vanaf de maan gezien draait de aarde wel, maar hij lijkt stil te hangen. De oorzaak ligt in de getijdenbeweging die ze op elkaar uitoefenen. Figuur 5 illustreert dat. Getekend is de situatie waarmee leerboeken over getijden altijd beginnen. Je beschouwt de aarde als een vaste kern met daar omheen een watermassa. Stel je nu voor dat de maan wel gewoon om ons heen zou draaien maar dat de aarde met dezelfde hoeksnelheid om zijn as zou roteren zodat we de maan op een vaste plaats stil in de lucht zouden zien hangen. In dit "bevroren" beeld neemt de watermassa een ellipsvorm aan met de lange as langs de verbindingslijn aarde-maan.

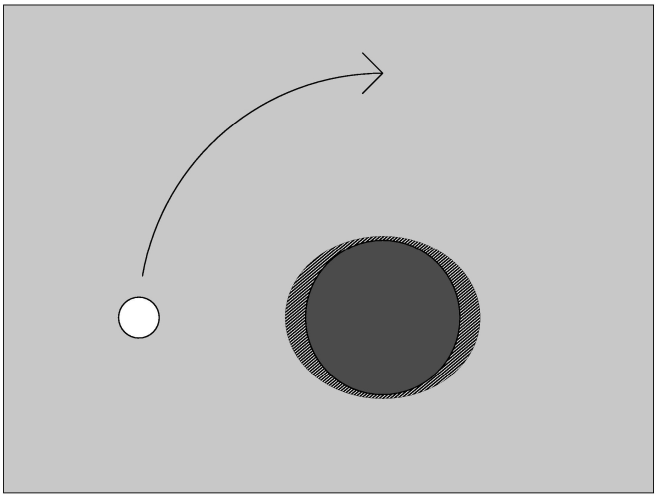

Fig. 5: *De aantrekkingskracht van de maan veroorzaakt getijden. In dit "stilstaande" beeld is de watermassa van de aarde een ellips en de lange as wijst naar de maan*.

Je kunt uitrekenen dat de rijzing boven het mediaanvlak op de toppen van die ellips ongeveer 40 centimeter is. Terug naar een realistischer beeld, waarin de aarde draait, maar nog steeds helemaal met water bedekt is. De maan komt ongeveer iedere 25 langs. De ellipsvorm van de watermassa volgt de maan, zij het met een vertraging.
Die getijdenbeweging levert een wrijvingskracht op, die het draaien van de aarde afremt. Uiteindelijk zal de aarde stil komen te staan ten opzichte van de maan. We draaien dan nog wel om elkaar heen, maar kijken elkaar steeds met hetzelfde "gezicht" aan. Een etmaal, de tijd tussen twee zonsopgangen, zal dan een maand lang geworden zijn.
Zover is het nog niet en niemand van ons zal het meemaken: dat duurt nog miljarden jaren. Maar omgekeerd heeft dit scenario zich voor de maan al voltrokken. Oorspronkelijk draaide die ook om zijn as en was verder heet en vloeibaar. Op dezelfde manier als je berekent dat de rijzing van de watermassa op aarde ongeveer 40 centimeter is, vind je dat omgekeerd de aarde een getijdengolf van vloeibaar gesteente om de maan heeft opgewekt met een rijzing van meer dan 100 meter! Dit, in combinatie met de veel kleinere draaïingsenergie van de maan, heeft er voor gezorgd dat de maan al lang geleden stil is komen te staan. Of beter gezegd: hij draait nog wel om zijn as, maar zijn omwentelingssnelheid is gelijk geworden aan zijn omloopstijd rond de aarde.

Literatuur over getijden:

1) J.J. Dronkers, *Tidal computations in rivers and coastal waters, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1964.*
2) S.Y. van der Werf, *De maan en het getijdenkompas,* Cornelis Douwes **132**(1997)3304-3309.